Άσκηση 1

α) Παρατηρούμε ότι η ποσότητα 3x1+x2 μεγαλώνει όσο «κινούμαστε» δεξία στον άξονα x1. Το δεξιότερο σημείο που ανήκει στην εφικτή περιοχή είναι το σημείο τομής της ευθείας 6x1 + 5x2 =30 με τον άξονα x1 .

⇒

β) Έυκολα διαπιστώνουμε από το γράφημα , ότι για τις μαύρες και τις κίτρινες ευθείες το ελάχιστο αποκλείεται να είναι σε αυτό το σημείο, καθώς υπάρχουν παράλληλες αυτών των ευθειών , που διαπερνούν την εφικτή περιοχή σε πιο «οριακές» θέσεις. (είτε προς τα κάτω είτε προς τα πάνω) . Για τις κόκκινες ευθείες βλέπουμε ότι οποιαδήποτε παράλληλή τους μας οδηγεί στο σημείο αυτό. Άρα

Το σημείο είναι το σημείο τομής των ευθειών 6x1 +3x2 =12 και 4x1 + 8x2 = 16.

⇒

Για την εύρεση των διακεκομένων ευθειών επιλύθηκε το παρακάτω σύστημα ως προς x2:

γ) Όμοια με το ερωτημα β) , παρατηρούμε ότι οι παράλληλες των μαύρων και κίτρινων ευθειών θα μας οδηγούσαν σίγουρα σε άλλο σημείο. Για τις κόκκινες ευθείες βλέπουμε ότι οποιαδήποτε παράλληλή τους θα έχει μέγιστο στο σημείο αυτό.

Το σημείο είναι το σημείο τομής των ευθειών 6x1 + 5x2 =30 και 6x1 + 7x2 =36.

⇒

Για την εύρεση των διακεκομένων ευθειών επιλύθηκε το παρακάτω σύστημα ως προς x2:

Άσκηση 2

Xij = H μεταφορά από την πόλη i στην πόλη j.

Για εξοικονόμηση μεταβλητών χρησιμοποιούμε αρνητικές τιμές για τις διαδρομές με κατεύθυνση προς τα αριστερά. (Για τις Xji).

Οι πιθανές διαδρομές από και προς γειτονικούς κόμβους για κάθε κόμβο , παρατίθονται παρακάτω :

Κόμβος (s): Xsa + Xsb + Xsc = 1

Κόμβος (a): Xab + Xad - Xsa= 0

Κόμβος (b): Xbe - Xsb - Xab = 0

Κόμβος (c): Xce + Xcd - Xsc = 0

Κόμβος (d): Xdt - Xad - Xcd = 0

Κόμβος (e): Xet - Xbe - Xce = 0

Κόμβος (t): - Xdt - Xet = -1

Η μεταβλητή Xij  παίρνει την τιμή 1 όταν διανύουμε τον συγκεκριμένο σύνδεσμο με κατεύθυνση προς τα δεξιά ( τον κόμβο t) , 0 όταν δεν ακολουθείται ο συγκεκριμένος σύνδεσμος και -1 όταν τον διανύουμε με κατεύθυνση προς τα αριστερά ( τον κόμβο s). Το θετικό πρόσημο που έπεται των μεταβλητών δηλώνει μεταφορά από τον συγκεκριμένο κόμβο σε κάποιον άλλον, ενώ το αρνητικό πρόσημο από κάποιον άλλο κόμβο προς τον συγκεκριμένο.

Αναζητούμε το μέγιστο της αντικειμενικής συνάρτησης που διαμορφώνεται ώς εξής :

Max Z = 3 Xsa + Xsb + Xsc + Xad + Xab + 3 Xbe + 4 Xcd + 4 Xce + 4 Xdt + Xet

Άσκηση 3

Η ποσότητα του προιόντος που θα έχουμε στο τέλος του μήνα είναι η ποσότητα που μας είχε περισσέψει τον προηγούμενο μήνα + την διαφορά της παραγωγής , ζήτησης για αυτόν τον μήνα.

Δηλαδή si=si-1+ xi – di  για i=1,2…,12

Si = s0 + - για i=1, 2…, 12

Η διαφορά παραγωγής για ένα μήνα σε σχέση με τον προηγούμενό του είναι , di= xi-xi-1 για i=1,2…,12

Όσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα Si  , τόσο μεγαλύτερη θα είναι η ποσότητα των αδιάθετων προιόντων θα πρέπει να αποθηκευτούν. Ακόμη , όσο μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή είναι η πόσοτητα di , τόσο μεγαλύτερη θα είναι η διαφορά στο ύψος της παραγωγής για τον i-οστό μήνα, σε σχέση με τον προηγούμενό του. (Απόλυτη τιμή καθώς δεν έχει σημασία αν η παραγωγή μειώθηκε ή αυξήθηκε για αυτό το μήνα, η διαφορά είναι αυτή που επιφέρει επιπλέον κόστος).

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής:

Z= 50 + 20 για i=1, 2…, 12, της οποίας αναζητούμε το min.

Άσκηση 4

γ) C= {(x1,x2) ∈ R2|3≤ x2≤4}

Έστω , ∈ C και t ∈ [0,1]. Πρέπει να δείξω ότι [t+(1-t)] ∈ C.

Δηλαδή, t(u1,u2)+(1-t)(w1,w2)=[tu1+(1-t)w1,tu2+(1-t)w2] ∈ C.

Άρα ότι 3 ≤ tu2+(1-t)w2 ≤ 4

Έχουμε ότι , ∈ C άρα 3 ≤ u2 ≤ 4 (1) και 3 ≤ w2 ≤ 4 (2)

(1)⇒ 3t ≤ tu2 ≤ 4t αφού t≥0

(2)⇒ 3(1-t) ≤ w2(1-t) ≤ 4(1-t) αφού 1-t≥0

(1)+(2) ⇒ 3t+3(1-t) ≤ tu2+ w2(1-t) ≤ 4t+4(1-t)

⇒3 ≤ tu2+ (1-t)w2 ≤ 4. Άρα πρόκειται για κυρτό σύνολο.

δ) C= {(x1,x2,…,xn) ∈ Rn| x1≥x2≥…≥ xn}

Έστω , ∈ C και t ∈ [0,1]. Πρέπει να δείξω ότι [t+(1-t)] ∈ C.

Δηλαδή , t(u1,u2,…,un)+(1-t)(w1,w2,…,wn)=[tu1+(1-t)w1,tu2+(1-t)w2,…,tun+(1-t)wn] ∈ C.

Άρα ότι tu1+(1-t)w1 ≥ tu2+(1-t)w2 ≥ … ≥ tun+(1-t)wn

Έχουμε ότι , ∈ C άρα u1 ≥ u2 ≥ … ≥ un (1) και w1 ≥ w2 ≥ … ≥ wn (2)

(1)⇒ tu1 ≥ tu2 ≥ … ≥ tun αφού t≥0

(2)⇒ (1-t) w1 ≥ (1-t) w2 ≥ … ≥ (1-t) wn αφού 1-t≥0

(1)+ (2) ⇒ tu1 + (1-t) w1 ≥ tu2 + (1-t) w2 ≥ … ≥ tun + (1-t) wn

Το σύνολο είναι κυρτό.